L.P. Kairouan **Devoir de contrôle N°1** **Prof : Chouihi**

Le : 08 / 11 / 10 **Durée : 2 heures** **Classe : $4M_2$**

Exercice N°1 (2points)

Pour chacune des propositions suivantes une et une seule réponse est correcte ; sur votre copie reportez le numéro de la proposition et la lettre correspondante à la réponse correcte.
(aucune justification n'est demandée)

1) Le quotient de 12345 par – 57 est égal à:
   a) –215 b) – 216 c) – 217

2) Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = 2^n + 3^n$. La congruence $a_n \equiv 0\ [5]$ est valable pour:
   a) tout entier naturel n pair b) tout entier naturel n c) tout entier naturel n impair

3) Soit x un entier relatif tel que : $x \equiv 16\ [17]$.
   a) $x^{2010} + x^{2011} \equiv 0\ [17]$ b) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0\ [17]$ c) $x \equiv 2^{88}\ [17]$

4) L'ensemble $\{M(z) \in P \ / \ \arg[(z+1-i)(\overline{z}+2+3i)] \equiv \pi\left[2\pi\right]\}$ est
   a) une droite b) une demi-droite c) un segment

Exercice N°2 (3 points)

1) a) Montrer que pour tout réel x, on a: $e^{ix} + e^{3ix} + e^{5ix} + e^{7ix} = 4(\cos x)(\cos 2x)e^{4ix}$

   b) En déduire la transformation en produit de chacune des expressions suivantes:

   A = cosx + cos3x + cos5x + cos7x et B = sinx + sin3x + sin5x + sin7x

2) A laide des nombres complexes, montrer les égalités: $\begin{cases} \cos x - 2\cos 2x + \cos 3x = -4(\sin(\frac{x}{2}))^2 \cos 2x \\ \sin x - 2\sin 2x + \sin 3x = -4(\sin(\frac{x}{2}))^2 \sin 2x \end{cases}$

Exercice N°3 (4 points)

1) Soit n un entier naturel.

   a) Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de 4^n par 9.

   b) Soit le nombre $A_n = 4^n \times (3n - 1) + 1$.

   Démontrer que pour tout entier naturel n, l'entier A_n est divisible par 9.

2) Déterminer le chiffre des unités de l'entier 7^{2011}.

3) Déterminer le reste dans la division euclidienne par 17 de $5 \times 35^{123} - 9 \times 50^{312}$.

Exercice N°4 **(5 points)**

A tout nombre réel $\theta \in]-\pi,\pi[$ on associe l'équation à variable complexe z

$$(E_\theta): \; z^2 - 2i(1+\cos\theta)z - 2(1+\cos\theta) = 0.$$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) .

2) On pose : $z_1 = i(1+e^{i\theta})$ et $z_2 = i(1+e^{-i\theta})$ et on désigne par M_1 et M_2 leurs images respectives dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

   a) Déterminer la forme trigonométrique de z_1 et z_2.

   b) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M_1 lorsque θ décrit $]-\pi,\pi[$.

   c) Montrer que M_2 est l'image de M_1 par une symétrie orthogonale que l'on précisera.

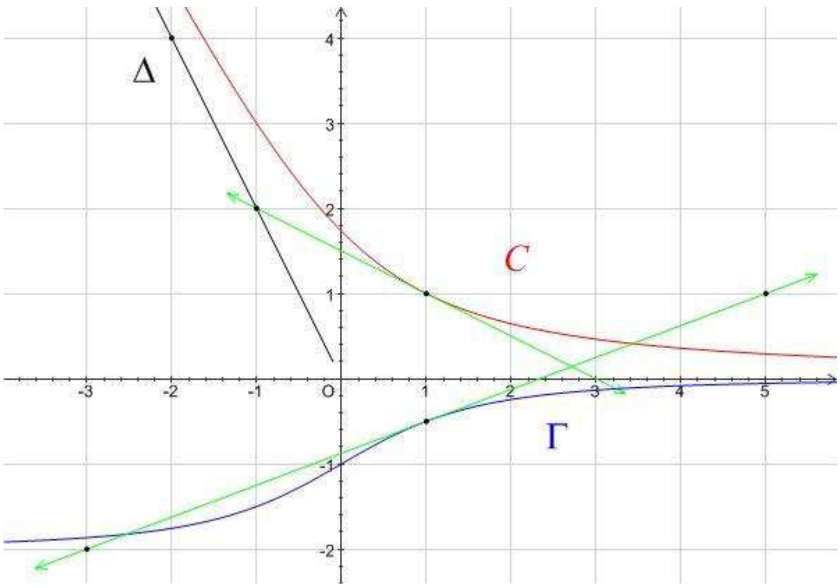
   d) En déduire l'ensemble Γ_2 des points M_2 lorsque θ décrit $]-\pi,\pi[$.

Exercice N°5 **(6 points)**

Dans la figure ci-contre C est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f; Γ est la courbe de sa fonction dérivée.

L'axe des abscisses est une asymptote commune aux deux courbes C et Γ au voisinage de $+\infty$.

La droite Δ est une asymptote à la courbe C au voisinage de $-\infty$.



A/ Par lecture graphique, déterminer :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)+2x-1]$

3) $f(1)$, $f'(1)$ et $f''(1)$.

B/ On donne $f(x) = \sqrt{x^2+3} - x$.

N.B: Dans la suite toutes les questions **<u>ne seront plus</u>** traiter par lecture graphique.

1) a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in IR$.

   b) Calculer $f''(x)$ pour $x \in IR$ et en déduire que f' est strictement croissante sur IR.

   c) En appliquant le théorème des accroissements finis montrer que pour tout $x \in [\frac{1}{2},2]$ on a:

$$|f(x)-1| \leq \frac{3}{4}|x-1|$$

2) Soit g une fonction continue sur [0,1] et dérivable sur]0,1[et tel que: $g(0) = 1$ et $g(1) = \sqrt{3}$.

   a) Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

   b) Montrer qu'il existe au moins un réel $\beta \in]0,1[$ tel que $f'(\beta) = -g'(\beta)$.

3) On pose $u(x) = x\sin(\frac{2}{x})$ et $v(x) = \frac{-1}{x^2} + \cos(\frac{1}{x})$

   a) A l'aide des théorèmes de comparaison, étudier les limites en 0 des fonctions u et v.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (u\circ f)(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} (f\circ v)(x)$

Exercice N°1

1) $b < 0$ donc $q = E(a/b) + 1 = -216 \rightarrow$ b)

2) Il suffit de remarquer que la congruence est fausse pour n = 0 et en tenant compte de la présentation de l'exercice (une et une seule…) on peut conclure que la réponse c) est la correcte → c)

3) En remarquant que: $16 \equiv -1\ [17]$ on peut conclure immédiatement que a) est la bonne → a)

4) Remarquer que : $\arg[(z+1-i)(\bar{z}+2+3i)] \equiv \pi\left[2\pi\right]$

$\Leftrightarrow \arg(\frac{z+1-i}{z+2-3i}) \equiv \pi\left[2\pi\right]$ on peut conclure qu'il s'agit d'un segment →c)

Exercice N°2

$$1)\ a)\ e^{ix}+e^{3ix}+e^{5ix}+e^{7ix} = e^{ix}(1+e^{2ix})+e^{5ix}(1+e^{2ix})$$
$$= e^{ix}(1+e^{2ix})(1+e^{4ix})$$
$$= e^{ix}[e^{ix}(e^{-ix}+e^{ix})][e^{2ix}(e^{-2ix}+e^{2ix})]$$
$$= 4\cos x\cos 2x\, e^{4ix}$$

b)

$* \ e^{ix}+e^{3ix}+e^{5ix}+e^{7ix} =$
$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x+i(\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x)$

$* \ 4\cos x\cos 2x\, e^{4ix} =$
$4\cos x\cos 2x\cos 4x + 4i\cos x\cos 2x\sin 4x$

Donc, en tenant compte de l'égalité établie en a) on obtient: $\begin{cases} A = 4\cos x\cos 2x\cos 4x \\ B = 4\cos x\cos 2x\sin 4x \end{cases}$

$$2)\ e^{ix}-2e^{2ix}+e^{3ix} = e^{2ix}(e^{-ix}-2+e^{ix})$$
$$= (-2+2\cos x)e^{2ix}$$
$$= -4(\sin(\frac{x}{2}))^2 e^{2ix}$$

L'identification des écritures sous forme algébrique des deux membres de l'égalité permet de déduire que:

$$\begin{cases} \cos x - 2\cos 2x + \cos 3x = -4(\sin(\frac{x}{2}))^2\cos 2x \\ \sin x - 2\sin 2x + \sin 3x = -4(\sin(\frac{x}{2}))^2\sin 2x \end{cases}$$

Exercice N°3

1) a) $4^0 \equiv 1\ [9]$ $4^1 \equiv 4\ [9]$ $4^2 \equiv 7\ [9]$ $4^3 \equiv 1\ [9]$

Si $n = 3p$, $p \in IN$ alors $4^n = (4^3)^p \equiv 1[9]$ donc r = 1

Si $n = 3p+1$, $p \in IN$ alors $4^n = (4^{3p})4 \equiv 4[9]$ donc r = 4

Si $n = 3p+2$, $p \in IN$ alors $4^n = (4^{3p})4^2 \equiv 7[9]$ donc r = 7

b) **si n = 3p** alors $3n - 1 = 9p - 1 \equiv -1[9]$ et $4^n \equiv 1[9]$
donc $A_n \equiv -1 + 1 \equiv 0\ [9]$

si n = 3p+1 alors $3n - 1 = 9p + 2 \equiv 2\ [9]$ et $4^n \equiv 4\ [9]$
donc $A_n \equiv 8 + 1 \equiv 0\ [9]$

si n = 3p+2 alors $3n - 1 = 9p + 5 \equiv 5\ [9]$ et $4^n \equiv 7\ [9]$
donc $A_n \equiv 35 + 1 \equiv 0\ [9]$

2) $7^2 \equiv -1[10]$ donc $7^{2011} \equiv -7 \equiv 3[10]$ donc le chiffre des unités de 7^{2011} est égal à **3**

3) $35 \equiv 1[17]$ et $50 \equiv -1[17]$ donc
$5\times 35^{123} - 9\times 50^{312} \equiv 5 - 9 \equiv 13\ [17]$ donc **r = 13**.

Exercice N°4

1) $\Delta' = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$ donc:
$z' = -\sin\theta + i(1+\cos\theta)$ et $z'' = \sin\theta + i(1+\cos\theta)$

2) a) $z_1 = i(1+e^{i\theta}) = ie^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})$
$= 2\cos\frac{\theta}{2}\ e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}$

Or $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ donc

$z_1 = [2\cos\frac{\theta}{2},\ \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}]$

On peut faire un raisonnement analogue ou remarque que $z_2 = -\overline{z_1}$ et déduire immédiatement

$z_2 = [2\cos\frac{\theta}{2},\ \frac{-\theta}{2}+\frac{\pi}{2}]$

b) $z_1 = i + ie^{i\theta} \Leftrightarrow z_1 - i = ie^{i\theta} \Leftrightarrow z_1 - i = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z-i| = 1 \\ \arg(z-i) \equiv \theta + \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AM_1 = 1 \\ (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM_1}})\ \text{décrit} \left]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\end{cases} \quad \text{avec } A(i)$$

Donc Γ_1 est le cercle de centre A et de rayon 1 privé de l'origine O. (l'origine correspond à z_1 pour $\theta = \pi$ ou $\theta = -\pi$)

c) en a) on a remarqué que $z_2 = -\overline{z_1}$ ce prouve que M_2 est l'image de M_1 par la symétrie orthogonale d'axe (yy').

d) Le centre de Γ_1 étant sur l'axe de symétrie (yy') donc $\Gamma_2 = \Gamma_1$.

Exercice N°5

A/ 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+2x-1]=-1$

3) f(1) = 1

$f'(1) = -\frac{1}{2}$ (coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1)

$f''(1) = \frac{3}{8}$ (coefficient directeur de la tangente à Γ au point d'abscisse 1)

B/ 1) a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1$

b) $f''(x) = \frac{3}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

Pour tout $x\in IR$, $f''(x) > 0$ donc f ' est strictement croissante sur IR.

c) f ' est croissante sur IR donc:

$\frac{1}{2}\le x\le 2 \Rightarrow f'(\frac{1}{2})\le f'(x)\le f'(2)$ et comme

$f'(2)<0$ donc $|f'(x)|\le -f'(\frac{1}{2})\le\frac{3}{4}$ (à vérifier par le calcul).

$\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } [\frac{1}{2},2] \\ \text{pour tout } t\in[\frac{1}{2},2],\ |f'(t)|\le\frac{3}{4} \end{cases}$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x\in[\frac{1}{2},2]$ on a: $|f(x)-f(1)|\le\frac{3}{4}|x-1|$ et comme f(1) = 1 donc on peut conclure que:

pour tout $x\in[\frac{1}{2},2]$ on a: $|f(x)-1|\le\frac{3}{4}|x-1|$

2) a) Posons $\varphi(x) = f(x) - g(x)$; $x\in[0,1]$

* f et g sont continues sur [0,1] donc φ est continue sur [0,1].

*$\varphi(0) = f(0) - g(0) = \sqrt{3} - 1 > 0$

$\varphi(1) = f(1) - g(1) = 1 - \sqrt{3} < 0$

* $\begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0,1] \\ \varphi(0)\times\varphi(1)\prec 0 \end{cases}$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $\alpha\in]0,1[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

$\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = g(\alpha)$

b) Posons $\Psi(x) = f(x) + g(x)$, $x\in[0,1]$

$\begin{cases} \psi \text{ est continue sur } [0,1] \\ \psi \text{ est dérivable sur }]0,1[\\ \psi(0)=1+\sqrt{3}=\psi(1) \end{cases}$ donc, d'après le théorème de Rolle, il existe au moins $\beta\in]0,1[$ tel que: $\Psi'(\beta)=0$

$\Psi'(\beta) = 0 \Leftrightarrow f'(\beta) = - g'(\beta)$

3) a) * Pour tout $x\neq 0$, $|u(x)|\le|x|$ donc $\lim\limits_{x\to0}u(x)=0$

* $\begin{cases} \text{pour tout } x\neq0,\ v(x)\le\frac{-1}{x^2}+1 \\ \lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{x^2}+1=-\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to0}v(x)=-\infty$

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to0}u(x)=0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(uof)(x)=0$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0}v(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to0}(fov)(x)=+\infty$